Das „absolute Quadrupolmoment“ — Eine magnetostatische Fundamentalgröße und ihre geophysikalische Bedeutung

Von Hans G. Macht *

(Z. Naturforschg. **3a**, 189—195 [1948]; eingegangen am 29. September 1947)

Ausgehend von der kanonischen Form der erdmagnetischen Potentialentwicklung wird hervorgehoben, daß dem einzigen Glied 2. Ordnung derselben (V_2''-Anteil) eine besondere Bedeutung beizumessen ist. Da der V_2''-Koeffizient $\bar{n}$ bei festgehaltener magnetischer Dipolachsenrichtung gegen Koordinatentransformationen invariant ist, bezeichnet dieses Glied — zunächst rein formal — einen gewissen „regulären Anteil“ der *in*homogenen Magnetisierung der Erde.

Physikalisch läßt sich der V_2''-Anteil als das Potential eines einzelnen, transversalen Quadrupols 2. Art interpretieren, dessen neutrale Achse parallel zur Dipolachse des betr. Magneten orientiert ist. Das durch $\bar{n}$ ausgedrückte, invariante „Moment“ dieses Gebildes 2. Ordnung wird als das „absolute Quadrupolmoment“ bezeichnet; es stellt eine Fundamentalgröße jedes inhomogenen Magneten dar, die ergänzend zu dessen Dipolmoment 1. Ordnung hinzutritt.

Durch Hinweis auf eine besondere Erscheinung der polaren erdmagnetischen Felder (elliptische Gestalt bestimmter isomagnetischer Kurvensysteme) wird die planetarisch-geophysikalische Bedeutung des *irdischen* „abs. Quadrupolmoments“ aufgezeigt. Als mögliche Erklärung desselben wird die *Überlagerung* der Felder zweier (exzentrischer) Dipole angegeben, die das magnetische „Kern-“ und „Rindenfeld“ der Erde repräsentieren.

I.

Das Potential W eines permanenten Magneten läßt sich außerhalb einer diesen völlig umschließenden Kugel (Radius R) durch eine konvergente Reihenentwicklung nach fallenden Potenzen von $r > R$ darstellen[1],

$$W = R \sum_{1}^{\infty}{}^{n} \, (R/r)^{n+1} \, V_n \, , \tag{1}$$

mit dem allgemeinen Glied n-ter Ordnung

$$V_n = \sum_{0}^{n}{}^{m} (a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) \, P_n^m (\cos \vartheta) \, . \tag{2}$$

In (2) bezeichnen die $P_n^m(\cos\vartheta)$, kurz $P_n^m(\vartheta)$, zugeordnete und *normierte* Kugelfunktionen[2] der Poldistanz $\vartheta = 90° - \varphi$ eines mit seinem Ursprung im Kugelzentrum O liegenden Polarkoordinatensystems r, ϑ, λ. Die Koeffizienten a_n^m, b_n^m (Dimension $[l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}]$) sind die empirisch zu ermittelnden Parameter des Magneten.

Die mit R^3 multiplizierte Quadratsumme der Koeffizienten 1. Ordnung stellt eine invariante, charakteristische Größe, das Quadrat des *Moments* M, dar. Es ist

$$(a_1^0 a_1^0 + a_1^1 a_1^1 + b_1^1 b_1^1)^{1/2} \cdot R^3 = \bar{m} R^3 = M \, ; \tag{3}$$

der Faktor $\bar{m} = M/R^3$ wird auch „reduziertes Moment“ genannt[1]. (Für die Erde beträgt nach Bartels[1] unter Zugrundelegung der Potentialanalyse für die Epoche 1922,5 $\bar{m} = 315{,}3 \times 10^{-3}$ Γ.) Diesen Koeffizienten 1. Ordnung kommt somit eine besondere, reale physikalische Bedeutung zu; sie können als Maßzahlen für die Momentkomponenten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem ($M_x = a_1^0 R^3$, usw.) aufgefaßt werden. Im *Erd-Innenfeld* überragen $\bar{m}$ und insbesondere a_1^0

* (24b) Kiel, Kleiststr. 3, II.

[1] Vgl. J. Bartels, Terr. Magn. **41**, 225—250 [1936].

[2] Es handelt sich hier um die von Ad. Schmidt eingeführten und heute in der Geophysik, insbesondere für erdmagnetische Berechnungen, allgemein gebräuchlichen Kugelfunktionen $P_n^m(\vartheta)$, deren gleitende Normierungsbasis durch $\frac{1}{4\pi}\int [P_n^m(\vartheta)\cos m\lambda]^2 df = \frac{1}{2n+1}$ bzw. $\frac{1}{4\pi}\int [P_n^m(\vartheta)\sin m\lambda]^2 df = \frac{1}{2n+1}$ definiert ist (Integrale über die Einheitskugel erstreckt). Es gilt daher:

$P_1^0(\vartheta) = \cos\vartheta$, $P_1^1(\vartheta) = \sin\vartheta$, $P_2^0(\vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1)$,

$P_2^1(\vartheta) = \sqrt{3}\sin\vartheta\cos\vartheta$, $P_2^2(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\vartheta$, usw. — Vgl. Encyklop. Math. Wiss. **VI**, IB, S. 266 ff.

(rotationssymmetrischer Anteil der homogenen Erdmagnetisierung) alle Koeffizienten höherer Ordnung um mindestens eine Zehner-Größenordnung. Das Innenfeld der Erde läßt sich daher durch das einer Kugel mit gleichem Radius R und homogener Magnetisierung $J = 3\,\overline{m}/4\pi$ idealisieren, deren Potential wiederum mit dem eines zentralen Dipols vom Moment M identisch ist.

Die Glieder 2. und höherer Ordnung in (1) ergeben insgesamt den Anteil der *in*homogenen Magnetisierung; ihren Koeffizienten kommt zunächst nur rein empirische bzw. formal-rechnerische, jedoch keine unmittelbare physikalische Bedeutung zu. Dies findet auch darin Ausdruck, daß die a_n^m, b_n^m vom gewählten Koordinatensystem, d. h. von der Lage seines Ursprungs und seiner Zentralachse ($\vartheta = 0°$), *abhängig* sind. Bei einer Drehung und Verschiebung des zugrunde liegenden Koordinatensystems treten neue Werte $a_n^{m\prime} \neq a_n^m$, $b_n^{m\prime} \neq b_n^m$ auf. Dagegen bleibt die durch (3) definierte Größe $\overline{m}$ als Betrag eines Vektors konstant.

Durch geeignete Transformationen lassen sich nun die Glieder 1. und 2. Ordnung in (1) weitgehend vereinfachen. Zunächst kann durch eine Neigung der Zentralachse um den Winkel ϑ_0 erreicht werden, daß die transformierten Koeffizienten $a_1^{1\prime} = b_1^{1\prime} = 0$ und somit $a_1^0 = \overline{m}$ werden; für den diesbezüglichen Neigungswinkel ϑ_0 gilt: $\tan \vartheta_0 = a_1^1 a_1^1 + b_1^1 b_1^1)^{1/2} / a_1^0$. Die neue Zentralachse $\vartheta' = 0°$ ist jetzt *parallel* zur Dipolmomentachse des Magneten orientiert. Für die Erde beträgt ϑ_0, d. h. die Neigung der *geomagnetischen Achse* gegen ihre Drehachse, 11,5°; jene trifft die Nordhalbkugel in etwa 78,5° N/69° W, dem *geomagnetischen* Nordpol.

Weiterhin lassen sich durch eine Ursprungsverlagerung — Parallelverschiebung der Koordinatenachsen — die transformierten Koeffizienten 2. Ordnung $a_2^{0\prime\prime}$, $a_2^{1\prime\prime}$ und $b_2^{1\prime\prime}$ zum Verschwinden bringen. Die rechtwinkligen, in Einheiten von R ausgedrückten Koordinaten ξ, η, ζ des neuen Nullpunkts C im ursprünglichen System bezeichnen die Lage des „magnetischen Mittel- oder Indifferenzpunktes" der Erde. Die Anfangsglieder der Entwicklung (1) lauten nunmehr, allgemein für jeden permanenten Magneten geltend:

$$W = a_1^{0\prime\prime}\, P_1^0(\vartheta')\, R'^3/r^2 + c_2^{2\prime\prime}\, P_2^2(\vartheta') \sin 2(\lambda' - \lambda_0')\, R'^4/r^3 + \dots \quad (4)$$

Dabei ist $a_1^{0\prime\prime} = a_1^{0\prime} = \overline{m}$, und es wurde die Amplitude $c_2^{2\prime\prime}$ eingeführt durch

$$c_2^{2\prime\prime} = \left(a_2^{2\prime\prime}\, a_2^{2\prime\prime} + b_2^{2\prime\prime} b_2^{2\prime\prime}\right)^{1/2}. \quad (5)$$

Den hier belanglosen Phasenwinkel λ_0' können wir gleich Null setzen, wenn wir λ' von einer geeigneten Richtung aus zählen. Gl. (4) stellt die sog. *kanonische Form* der erdmagnetischen Potentialentwicklung dar[2,3], sie bezieht sich also auf ein durch den magnetischen Mittelpunkt ($r = 0$) und die Momentachse ($\vartheta' = 0°$) festgelegtes Polarkoordinatensystem; R' bezeichnet wiederum den Radius einer Kugel um C, die den Magneten völlig umschließt.

Während die Bedeutung des 1. Gliedes von (4) klar ersichtlich ist (äquivalentes Dipolmoment des Magneten), ist die des $c_2^{2\prime\prime}$-Gliedes (V_2''-Anteil) dieser Entwicklung bisher nicht näher untersucht worden. Dies dürfte u. a. darauf zurückzuführen sein, daß die kanonische Potentialform ausschließlich von theoretischem Interesse, also ohne praktische Bedeutung ist. Insbesondere liegt der magnetische Mittelpunkt der *Erde* exzentrisch, rund 340 km von ihrem geometrischen Mittelpunkt entfernt. Da für die magnetischen Vermessungen und die aus diesen abgeleiteten Potentialberechnungen natürlich nur die unmittelbare Erdoberfläche in Frage kommt, müßte demzufolge statt R' in (4) eine Größe E' = Entfernung (C — Erdoberfläche) eingesetzt werden, die ihrerseits wieder eine komplizierte Funktion der geographischen Koordinaten φ, λ darstellt. Somit würden sich letzten Endes keine praktischen Vorteile gegenüber der Form (1) ergeben.

Wie sich weiter zeigen läßt[4], sind nun die Koeffizienten $a_2^{2\prime\prime}$, $b_2^{2\prime\prime}$ bei gleichbleibendem R' gegen Verlagerungen des Nullpunkts *invariant*, sofern die entsprechenden rechtwinkligen Koordinatenachsen *parallel* zu sich selber verschoben werden. Führen wir jetzt gemäß (5) die Größe $c_2^{2\prime\prime}$ ein, so ergibt sich als weitere Folgerung ein unveränderter Wert dieses Amplituden-Koeffizienten in allen Koordinatensystemen, deren Zentralachsen *parallel* zur Dipolmomentachse des Magneten orientiert sind.

Legen wir nunmehr für die allgemeine Entwicklung (1) die *geomagnetische* Achse (s. o.) als Zentralachse zugrunde (Koeffizienten $a_n^{m\prime}$, $b_n^{m\prime}$),

[3] Ad. Schmidt, Terr. Magn. **17**, 181—232 [1912].
[4] Ad. Schmidt, Gerlands Beitr. Geophysik **41**, 346—358 [1934].

so hat der Amplituden-Koeffizient $c_2^{2\prime}$ des $P_2^2(\vartheta')$-Partialgliedes von (1) den *gleichen* Wert wie $c_2^{2\prime\prime}$ in (4), während jetzt $E' = R = \text{const.}$ ϑ' und λ' stellen in diesem System auf der Erdoberfläche die bekannten, für manche geophysikalischen Untersuchungen (Höhenstrahlung, Polarlichter, magnet. Stürme) wichtigen geomagnetischen Koordinaten Θ, Λ dar. — Die vorstehenden Betrachtungen gestatten die Schlußfolgerung, daß — außer $a_1^{0\prime}$, dem reduzierten Dipolmoment — auch dem invarianten Koeffizienten $c_2^{2\prime\prime}$ bzw. $c_2^{2\prime}$, d. h. dem $P_2^2(\vartheta')$-Partialglied (V_2''-Anteil) der kanonischen bzw. geomagnetischen Potentialentwicklung eine *spezielle, reale Bedeutung* beizumessen ist[5]. Diese soll nachfolgend, sowohl rein physikalisch als auch geophysikalisch, näher herausgestellt werden.

II.

Bei Verwendung der gemäß[2] definierten normierten Kugelfunktionen wird der auf die Einheitskugel bezogene absolute (quadratische) Mittelwert eines V_n-Gliedes in (1) durch

$$\overline{V_n^2} = \sum_0^n {}^m \left(a_n^m a_n^m + b_n^m b_n^m\right) / (2n+1) \qquad (6)$$

ausgedrückt[1]. Für das kanonische V_2''-Glied ergibt sich demgemäß:

$$|\overline{V_2''}| = c_2^{2\prime} / \sqrt{5} = 2\bar{n} / \sqrt{15} \sim \bar{n}/2 \, . \qquad (6')$$

[Durch Einführen der Größe $\bar{n} = c_2^{2\prime}\sqrt{3}/2$ ist der in $P_2^2(\vartheta')$ noch enthaltene Normierungsfaktor $\sqrt{3}/2$ eliminiert worden.] Da dieser $\overline{V_2''}$-Mittelwert in gleicher Weise wie $c_2^{2\prime}$ bzw. $\bar{n}$ *invariant* ist, stellt das $P_2^2(\vartheta')$-Partialglied in der „geomagnetischen“ Entwicklung von (1) — rein formal gesehen — das Potential eines gewissen „regulären Anteils“ der *in*homogenen Magnetisierung dar.

[5] Die im *geomagnetischen* System wieder auftretenden Koeffizienten 2. Ordnung $a_2^{0\prime} \neq 0$, $a_2^{1\prime} \neq 0$ und $b_2^{1\prime} \neq 0$ haben die Bedeutung von „Zusatzgrößen“, deren Werte in Verbindung mit $\bar{m}$ die (exzentrische) Lage des magnet. Mittelpunkts C (ξ', η', ζ') innerhalb der Referenzkugel R bestimmen. Es ist nämlich (vgl. Ad. Schmidt[3], S. 186):

$$\xi'/R = a_2^{0\prime}/2\,\bar{m}, \quad \eta'/R = a_2^{1\prime}/\bar{m}\sqrt{3}, \quad \zeta'/R = b_2^{1\prime}/\bar{m}\sqrt{3}\, .$$

[6] K. F. Herzfeld, Handb. d. Physik **XXIV**, **2**, S. 170 ff.

In Analogie zur Elektrostatik lassen sich nun die einzelnen Glieder 2. und höherer Ordnung in (1) als Multipole interpretieren[6]. Diese Betrachtungsweise ist aber, was speziell die Theorie des Erdmagnetismus anbetrifft, nicht üblich, da diesen magnetischen Multipolen keine unmittelbare

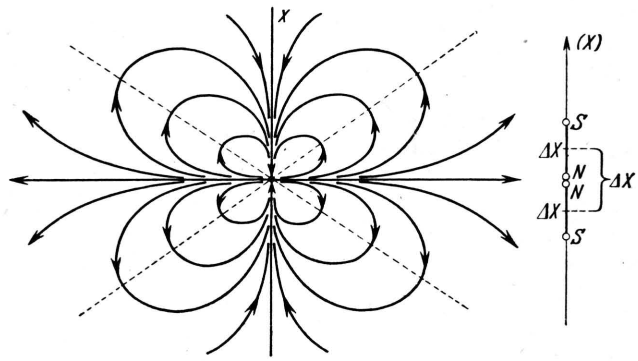

Abb. 1a. *Kraftlinienbild* (Meridianschnitt) eines *Quadrupols 1. Art.* — *Longitudinale* Anordnung der beiden erzeugenden Dipole auf der x-Zentralachse; s. kleine Nebenfigur rechts. Es resultiert ein *zonales*, rotationssymmetrisches Kraftfeld um die x-Achse.

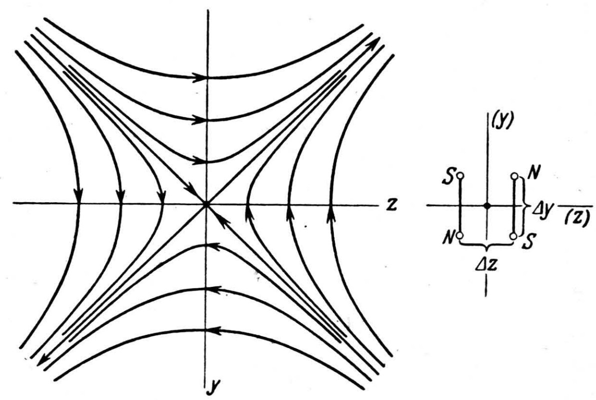

Abb. 1b. Desgl., in der Ebene eines *Quadrupols 2. Art.* „*Transversale*“ Anordnung der Dipole (senkrecht zur neutralen x-Achse) in der yz-Kordinatenebene; s. Nebenfigur. Die resultierenden *Kraftlinien* bilden (ebenso wie die Äquipotentiale in der yz-Ebene!) *gleichseitige Hyperbeln*, sie münden also — abgesehen von den vier Asymptoten — *nicht* in den Quadrupol selbst ein!

Bedeutung zukommt. Jedoch erscheint es nach den vorangegangenen Darlegungen über die Sonderstellung des kanonischen V_2''-Gliedes oder des — mit diesem identischen — „geomagnetischen“ $P_2^2(\vartheta')$-Partialgliedes angebracht, neben dem *Dipol*-Moment auch noch die entsprechende Größe 2. Ordnung, das *Quadrupol*-Moment, bei magnetostatischen Potentialuntersuchungen und -betrachtungen zu berücksichtigen.

In der *binomischen* Potentialentwicklung nach rechtwinkligen Koordinaten x, y, z weist das *gesamte* Quadrupolmoment, sei es eines elektro- oder eines magnetostatischen Gebildes, *sechs* Komponenten, je drei erster und zweiter Art, auf [6]. Ein *einzelner* Quadrupol *1. Art*, dessen „Moment" (s. u.) mit p_{ii}, $i = x, y, z$, bezeichnet werden möge, läßt sich physikalisch durch zwei auf einer Geraden, z. B. der x-Achse, mit ihren *gleich*namigen Polen *an*einander gelegte Elementarmagnete (Dipole) interpretieren; Abb. 1 a. Das Potential eines im Abstand $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ von diesem Quadrupol (als punktförmiges Gebilde im Koordinaten-Ursprung angenommen) entfernten Einheitspols lautet:

$$Q_1 = \frac{1}{2}\, p_{xx} \left\{3\,(x/r)^2 - 1\right\}/r^3$$
$$= p_{xx} \cdot P_2^0 \left\{\cos(x, r)\right\}/r^3 . \qquad (7)$$

Eine einzelne Quadrupolkomponente *2. Art*, z. B. p_{yz}, wird durch zwei Dipole dargestellt, deren Achsen nunmehr in die y- oder z-Richtung zeigen (im vorliegenden Fall von p_{yz}), und die mit ihren *un*gleichnamigen Polen parallel in infinitesimaler Entfernung Δz oder Δy in der z- bzw. y-Richtung *neben*einander gelegt werden; Abb. 1 b. Das zugehörige Potential Q_2 ergibt sich, mit der „neutralen", d. h. zur p_{yz}-Ebene senkrechten x-Achse als Zentrallinie, zu:

$$\begin{aligned} Q_2 &= 3\, p_{yz}\, y z / r^5 \\ &= \sqrt{3}\, p_{yz} \cdot P_2^2 \left\{\cos(x, r)\right\} \sin 2\lambda_{xz} / r^3 . \end{aligned} \qquad (8)$$

Die den einzelnen Quadrupolen (Komponenten) 1. und 2. Art zugeordneten Momente $p_{xx} = \mu'(\Delta x)^2$ usw., $p_{yz} = \mu' \Delta y \Delta z$ usw., sind dem Dipolmoment entsprechende Größen 2. Ordnung (Dimension $[l^{7/2} m^{1/2} t^{-1}]$), welche analog zu diesem durch sinngemäße Grenzübergänge definiert werden (Polstärken μ' der betr. Elementarmagnete $\to \infty$, Polabstände Δx bzw. Δy und $\Delta z \to 0$). Die Größe λ_{xz} in (8) bezeichnet den Winkel zwischen r und der xz-Ebene.

In der allgemeinen Polarkoordinatendarstellung (1) sind nun sämtliche den Ausdrücken (7) und (8) entsprechende Einzel-Quadrupolmomente in bestimmter Weise zusammengefaßt, so daß zwischen den — mit R^4 multiplizierten — Koeffizienten 2. Ordnung und den $p_{xx} \ldots$, $p_{xy} \ldots$ folgende Beziehungen bestehen:

$$a_2^0 R^4 = p_{xx} - \frac{1}{2}(p_{yy} + p_{zz}), \qquad a_2^1 R^4 = \sqrt{3}\, p_{xy},$$
$$b_2^1 R^4 = \sqrt{3}\, p_{xz}, \qquad a_2^2 R^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(p_{yy} - p_{zz}),$$
$$b_2^2 R^4 = \sqrt{3}\, p_{yz} . \qquad (9)$$

Nach zuvor Gesagtem (S. 190) ändern sich nun die letzten beiden Größen von (9) nicht, wenn man den Nullpunkt des zugrunde gelegten rechtwinkligen Koordinatensystems durch Parallelverschiebung der Achsen verlagert, sofern als x-Zentrallinie die (geo-)magnetische Achse bestimmt worden war. Bei einer *Drehung* der yz-Ebene um die x-Achse (Phasenwinkel λ_0') ändern sie sich aber derart, daß die Determinante

$$\frac{3}{4}(p_{yy} - p_{zz})^2 - 3\, p_{yz}^2 = (c_2^{2\prime})^2 \quad \textit{konstant} \text{ bleibt.}$$

Wählt man nunmehr die y-Richtung derart, daß $p_{yy} - p_{zz} = 0$ wird (Phase $\lambda_0' = 0°$), so enthält die *kanonische* Entwicklung [vgl. (4)] nur noch *ein* Glied 2. Ordnung, welches mit dem Ausdruck (8) identisch ist und daher eine Komponente 2. Art darstellt. Der Faktor $c_2^{2\prime\prime} R^4$ in (4) entspricht dem Parameter $\sqrt{3}\, p_{yz}$ in (8). Der (mit R^4/r^3 multiplizierte) V_2''-Anteil mit dem Koeffizienten $\bar{n}$ kann somit als das Potential eines bezüglich der x-Zentralachse „transversalen" Quadrupols 2. Art angesehen werden. In Anbetracht der dargelegten Sonderstellung von $c_2^{2\prime}$ und damit von $\bar{n}$ (Invarianz bei festgehaltener x-Richtung parallel zur magnetischen Achse) soll die Größe $p_{yz} = 2\,\bar{n}\,R^4/3$ als das *„absolute Quadrupolmoment"* des betr. Magneten (Erde) bezeichnet werden. [Auf der *Erdoberfläche* $r = R$ wird das „absolute Quadrupolfeld" gemäß (8) durch eine *sektorielle* Kugelflächenfunktion

$$V_2''/R = \bar{n} \sin^2 \Theta \sin 2(\Lambda - \Lambda_0)$$

beschrieben, die auf dem geomagnetischen Äquator $\Theta = 90°$ abwechselnd je zwei „Nord-" und „Süd-pole" aufweist (V_2'' = Minimum bzw. V_2'' = Maximum)].

Zusammenfassend zu Abschnitt II sei konstatiert:

Falls sich aus der empirischen Potentialentwicklung (1) für einen beliebigen inhomogenen Magneten ein kanonischer bzw. „geomagnetischer" Parameter $c_2^{2\prime} = c_2^{2\prime\prime} \neq 0$ oder $\bar{n} \neq 0$ ergibt, weist dieser Magnet neben dem Dipolmoment *noch als „regulären Anteil“ seiner inhomogenen Magnetisierung ein invariantes „absolutes Quadrupolmoment“ auf, dessen neutrale Achse parallel zur Dipolmomentachse orientiert ist*[7]. *Dieses absolute Quadrupolmoment stellt eine charakteristische magnetostatische Fundamentalgröße 2. Ordnung dar, die ergänzend zum Dipolmoment 1. Ordnung (Anteil der homogenen Magnetisierung) hinzutritt.* Das „absolute“ Quadrupolfeld ist mit demjenigen Potentialanteil 2. Ordnung identisch, der „durch Koordinatentransformationen nicht eliminiert werden kann“ (Schmidt[4]). Der zugehörige Parameter $\bar{n}$ nimmt als einziger von sämtlichen Koeffizienten 2. und höherer Ordnung eine Sonderstellung ein, die durch seine dargelegten Invarianzeigenschaften gekennzeichnet ist.

III.

Nachdem der physikalische Begriff des „absoluten Quadrupolmoments“ festgelegt worden ist, soll nunmehr die *geophysikalische Bedeutung* dieser Größe an Hand eines speziellen geomagnetischen Problems aufgezeigt werden.

Aus zirkumpolaren Kartendarstellungen ist zu entnehmen, daß bestimmte isomagnetische Kurvensysteme, vor allem im Nordpolargebiet[8], anstatt der zu erwartenden, annähernd kreisförmigen Gestalt (Überwiegen des Dipolfeldes) einen sehr ausgeprägten *ellipsenförmigen* Verlauf aufweisen. So bilden die (ausgeglichenen) Linien gleicher Horizontalintensität (*H-Isodynamen*), und ähnlich auch die *Isoklinen* (Linien gleicher Inklination der Magnetnadel!), langgestreckte elliptische Kurven um die wahren Oberflächen-Magnetpole ($H = 0$, $I = \pm 90°$) als Zentren. Die *große Hauptachse* dieser konzentrischen „Ellipsen“ verläuft im arktischen Bereich von Labrador/Hudson-Bay über das innere Polarmeer (Zentralarktis) nach Nordasien. In einer anderen Arbeit[9] hat Verf. ausführlich dargelegt, daß diese Erscheinung *grundsätzlich* durch das Zusammenwirken des „invarianten“ V_2''-Anteils der geomagnetischen Potentialentwicklung mit dem primären (zentralen) Dipol-Hauptfeld (V_1'-Anteil) erklärt werden kann. Erstgenannter Anteil ist also mit dem „absoluten Quadrupolfeld“ identisch, welches sich dem Dipolfeld modifizierend überlagert.

Die $R \cdot V_1'$-Potentiallinien (Dipolfeld!) bilden an der Erdoberfläche bekanntlich konzentrische Breitenkreise $\Theta = \text{const}$ um die idealen *geomagnetischen* Pole (vgl. S. 190). Hingegen stellen die gleichen Linien des wesentlich schwächeren $R \cdot V_2''$-Systems in der „Umgebung“ dieser Punkte, d. h. für $\Theta < 30°$, und bei Anwendung einer geeigneten azimutalen Kartenprojektion in

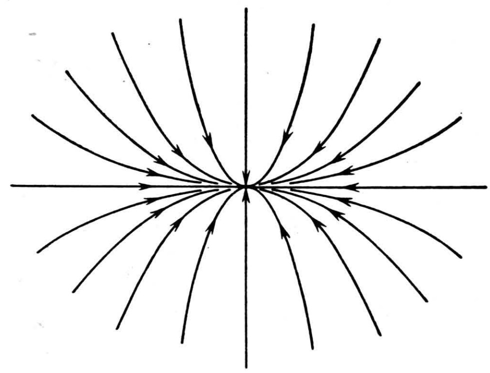

Abb. 2. Schematisches, *horizontales Kraftlinienbild* in einer Ebene senkrecht zur Dipolmoment-Achse eines *inhomogenen* Magneten bei Vorhandensein eines transversalen, *absoluten Quadrupolmoments.* — Das dem Dipol-Hauptfeld überlagerte abs. Quadrupolfeld bewirkt prinzipiell die *parabolische Deformation* der Horizontal-Kraftlinien in der Bildebene. Geophysikalisches Beispiel: *erdmagnetisches H-Feld des Nordpolargebiets.*

weitgehender Annäherung gleichseitige Hyperbeln dar (vgl. Abb. 1b). Letztere deformieren, da $|u| \gg \bar{n}$, sozusagen die Äquipotential-Kreise des primären Dipolfeldes zu *Ellipsen*, wie auch nach Überlagerung beider Kurvensysteme durch eine graphische Addition anschaulich gezeigt werden kann. Als *H-Isodynamen* ergeben sich fernerhin in diesem kombinierten $V_1' + V_2''$-System (Dipol- plus abs. Quadrupolfeld) ebenfalls Ellipsen, die gestaltsmäßig jedoch nicht mehr mit den Äquipotentialen übereinstimmen. [Gegenüber letzteren weist die konzentrische H-Ellipsenschar eine größere Erstreckung (Exzentrizität) längs der Hauptachse (s. o.) auf; wenn $\tau > 1$ das konstante Achsen-Dimensionsverhältnis der Potential-Ellipsen $R\,(V_1' + V_2'')$ bezeichnet, so beträgt dasjenige der resultierenden H-Isodynamenschar allgemein τ^2.]

[7] Zur Berechnung der kanonischen bzw. „geomagnetischen“ Koeffizienten $a_2^{2\prime}$, $b_2^{2\prime}$ aus den empirisch ermittelten Parametern a_n^m, b_n^m 1. und 2. Ordnung dienen — sofern $a_1^0 \gg a_1^1 \ldots b_2^2$ — die einfachen *Näherungsformeln* ([2], S. 285) $a_2^{2\prime} = a_2^2 - \alpha \cdot a_2^1 + \beta\, b_2^1$; $b_2^{2\prime} = b_2^2 - \alpha \cdot b_2^1 - \beta\, a_2^1$, mit $\alpha = a_1^1 / \bar{m}$, $\beta = b_1^1 / \bar{m}$. Aus diesen ergibt sich sodann $c_2^{2\prime} = 2\,\bar{n} / \sqrt{3}$ gemäß Gl. (5). — Vgl. hierzu den Nachtrag am Schluß dieser Arbeit.

[8] H. W. Fisk, Trans. Amer. Geophys. Union **12**, 134—139 [1931].

[9] H. G. Macht, Das erdmagnetische Feld der Polargebiete, Z. Meteorol. **1** (Heft 10), 289—297 [1947].

Eine weitere wichtige, mit vorstehenden Tatsachen verknüpfte Auswirkung des absoluten Quadrupolmoments der Erde ergibt sich für den *Verlauf der magnetischen Meridiane* (Kraft-Richtungslinien der H-Intensität) in den *Polarzonen*. Aus den zirkumpolaren elliptischen Oberflächen-Potentiallinien ($V_1' + V_2''$-Feld) resultiert als Orthogonalschar der horizontalen Kraftlinien oder magnetischen Meridiane in der Kartenebene ein System doppelter, *parabelförmiger* Kurven, die beiderseits *tangential* zu einer bestimmten „Nullgeraden", dem sog. Hauptmeridian (identisch mit der großen Hauptachse der erwähnten elliptischen H- und I-Kurvensysteme), in den — geomagnetischen — Oberflächenpol einmünden; Abb. 2. Die terrestrischen (großräumig ausgeglichenen) magnetischen Meridianlinien des Nordpolarbereichs zeigen nun in der Tat ein Bild (vgl. Fisk[8]), das *prinzipiell* der Abb. 2 völlig entspricht. Sie verlaufen *tangential* beiderseits eines „Hauptmeridians" als *angenähert parabolisch gekrümmte Kurven* in den wahren magnetischen Nordpol auf etwa 71 ° N / 96 ° W[10].

Das zum irdischen Dipolmoment hinzukommende *absolute* Quadrupolmoment bewirkt somit auch — grundsätzlich — die parabolische Deformation der H-Kraftlinien. Dieser „reguläre" V_2''-Anteil der *in*homogenen Erdmagnetisierung ist demnach nicht nur eine formale Rechengröße, vielmehr kommt ihm eine bestimmte, durch den Wert des Koeffizienten $\bar{n}$ ausgedrückte physikalische Realität zu. Man kann das absolute Quadrupolmoment als einen *gestaltenden Faktor* für die polaren geomagnetischen Oberflächenfelder ansprechen.

Das beharrliche Innenfeld der Erde setzt sich also aus zwei „invarianten" Grundanteilen zusammen, dem Dipol-Hauptfeld (Anteil der homogenen Erdmagnetisierung) und einem diesem überlagerten „absoluten Quadrupolfeld" („regulärer" Anteil der inhomogenen Erdmagnetisierung). Beide Anteile ergeben gemeinsam ein permanentes planetarisches Grundfeld, dem zusätzliche, regionale und lokale Störungen aufgeprägt sind. Letztere — durch Glieder sehr hoher Ordnung in (1) oder (4) ausgedrückt — verzerren die aus dem idealen planetarischen $R(V_1' + V_2'')$-Grundfeld resultierenden isomagnetischen Liniensysteme zwar beträchtlich[11], können jedoch in den Polarzonen deren charakteristische Züge (Ellipsengestalt der H-Isodynamen, parabelförmige mgt. Meridiane) keineswegs verwischen.

Die *Stärke des irdischen „absoluten Quadrupolmoments"*, $p_{\text{abs}} = 2\,\bar{n}\,R^4/3$, erhält man unter Verwendung der von J. Bartels[1] angegebenen Werte der Koeffizienten 1. und 2. Ordnung für 1922,5 ($\bar{n} = 19{,}5 \cdot 10^{-3}\,\Gamma$) angenähert zu:

$$\underline{p_{\text{abs}} = 2{,}1 \times 10^{33}\ \text{cm}^{7/2}\ \text{g}^{1/2}\ \text{sec}^{-1}}.$$

Um einen gewissen Vergleich mit der Stärke des irdischen Dipolmoments auf gleicher Dimensionsbasis zu erhalten, führen wir — analog zu $\bar{m}$ als reduziertem Dipolmoment (S. 189) — jetzt $2\bar{n}/3$ als reduziertes abs. Quadrupolmoment ein. Sodann ergibt $2\bar{n}/3\bar{m} \sim 1/25$ das Verhältnis dieser beiden reduzierten Momente der Erde. Durch das absolute Quadrupolmoment allein können jedoch an der Erdoberfläche vertikale Feldstärken bis zu $\pm 3\bar{n}$ sowie H-Intensitäten bis zu $2\bar{n}$ bewirkt werden, das sind Beträge, die 9,3% und 12,4% der entspr. Maximalwerte ($Z = \pm 2\bar{m}$; $H = |\bar{m}|$) des ungestörten (zentralen) Dipolfeldes der Erde ausmachen.

IV.

Der Hauptzweck vorliegender Arbeit bestand darin, den Begriff des „absoluten Quadrupolmoments" als eine magnetostatische Fundamentalgröße herauszuarbeiten und deren planetarisch-geophysikalische Bedeutung durch geomagnetische Tatsachen (Deformationen polarer isomagnetischer Kurvensysteme) zu belegen. Abschließend soll die Frage nach den möglichen *Ursachen* für das Vorhandensein eines derartigen Moments 2. Ordnung erörtert werden. Zunächst müssen die Dipole sowie die Multipole der Entwicklungen (1) und (4) als Abstraktionen aufgefaßt werden, die entsprechende Anteile einer freien Magnetismusverteilung (Raum- und Ober-

[10] Die alte, 1903/04 von R. Amundsen bestimmte Position zugrunde gelegt. Die gegenwärtige Lage ist nach neuesten kanadischen Vermessungen bei 73 ° N / 100 ° W anzunehmen (R. G. Madill, Arctic **1**, 8—18 [1948]).

[11] Beispielsweise liegt der wahre mgt. Nordpol (alte Position; s. vorhergehd. Anmerkg.) rund 1200 km vom (idealen) geomagnetischen Nordpol bei 78,5 ° N / 69 ° W entfernt. Des weiteren ist die Verzerrung, d. h. Ausweitung der terrestrischen H-Ellipsen (Isodynamen) und zugleich die besonders starke Zusammendrängung der mgt. Meridiane in der Zentralarktis auf eine hier gelegene, sehr intensive Regionalstörung zurückzuführen.

flächendichten) in und auf der Referenzkugel R bzw. R' interpretieren. Speziell würde eine Quadrupolkomponente 2. Art eine sektorielle Magnetismusanordnung um die zugehörige neutrale Achse ausdrücken, insbesondere das ***absolute*** Quadrupolmoment eine solche um die betr. (geo-) magnetische Achse. Natürliche Voraussetzung wiederum für das mögliche Auftreten einer derartigen Verteilung und damit eines V_2''-Gliedes in den entsprechenden Potentialentwicklungen ist eine *räumliche* Ausdehnung des betr. Magneten senkrecht zu seiner Dipolachse. [Im Fall eines beliebigen *linearen* (Stab-)Magneten lautet nämlich die kanonische Entwicklung

$$W = a_1^{0\prime} (R'^3/r)^2 \cos\vartheta' + R' \sum_3^\infty{}^n (R'/r)^{n+1} a_n^{0\prime} P_n^0(\vartheta'),$$

ein Ausdruck, in dem also nur *zonale* Kugelfunktionen 3. und höherer Ordnung — abgesehen von $P_1^0(\vartheta') = \cos\vartheta'$ — vorkommen. Ein linearer Magnet weist also kein absolutes Quadrupolmoment auf.]

Um nun zu einer *Deutung* der Multipolmomente in (1) bzw. (4) zu gelangen, ist es notwendig, bestimmte Anordnungen magnetischer Massen oder wahrscheinliche magnetische Systeme innerhalb der Referenzkugel zu postulieren. Als einfachste Erklärung des absoluten Quadrupolmoments ließe sich, vor allem im Hinblick auf das Erd-Innenfeld, die *Überlagerung* von zwei (senkrecht zueinander orientierten) exzentrischen Dipolen (A und B) in einer Meridianebene der Referenzkugel R angeben.

Die Achse des Dipols A möge mit der x-Zentralachse des gewählten Koordinatensystems zusammenfallen (Erdrotationsachse), sein Abstand vom Ursprung (Erdmittelpunkt) O sei e_1. Hingegen möge der *radial* orientierte Dipol B in der yz-Äquatorebene der (Erd-)Kugel R im Abstand $0 < e_2 < R$ von O angenommen werden (e_1 und e_2 dimensionslos, in Einheiten von R ausgedrückt!). Für dieses *Zweidipol-System* ergibt sich, wie an anderer Stelle näher ausgeführt werden soll, ein ***absolutes*** Quadrupolmoment

$$p_{\text{abs}} = \bar{a}\,\bar{b}\,R^4 \left\{\bar{a}\,e_2 + \bar{b}\,e_1\right\} / \bar{m}^2;$$

die Größen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ bezeichnen die reduzierten Momente der Dipole A und B, während hier $\bar{m} = (\bar{a}^2 + \bar{b}^2)^{1/2}$. Dieses p_{abs} stellt als eindeutige algebraische Funktion der vier festen Größen $\bar{a}$, $\bar{b}$, e_1, e_2 somit einen *Superpositionseffekt* der Felder beider exzentrischer Dipole dar.

Die Konzeption von zwei Dipolen und damit von *zwei getrennten magnetischen Systemen* — an Stelle nur eines exzentrischen Dipols (Bartels) — ermöglicht die Erklärung des *irdischen* absoluten Quadrupolmoments und der durch dieses bewirkten Erscheinungen im Oberflächenfeld. Auf Grund einer alten, durch die formale Analyse[12] nahegelegten Auffassung ließe sich das zur x- bzw. Rotationsachse symmetrische, überwiegende a_1^0-Dipolfeld der Erde als Haupt- oder „*Kernfeld*" in erster Linie dem gesamten Erdinnern, ihr schwächeres, transversales (a_1^1, b_1^1)-Dipolfeld hingegen als „*Rindenfeld*" den äußeren Schichten (Kruste) zuordnen. Diese beiden Teilfelder des Erd-Innenfeldes, je in bestmöglicher erster Annäherung durch einen exzentrischen Dipol repräsentiert, könnten als von etwas hypothetischer Natur angesehen werden, aber andererseits läßt sich zeigen, daß durch ihre Superposition nicht nur das „absolute Quadrupolmoment", sondern auch ein bedeutender Anteil des „*Restfeldes*" der Erde gedeutet werden kann (Restfeld = verbleibendes Oberflächenfeld nach Abzug des zentralen oder exzentrischen $\bar{m}$-Dipolfeldes vom beobachteten Feld).

Nachtrag: Die Näherungsformeln[7] für die kanonischen/geomagnetischen Koeffizienten $a_2^{2\prime}$, $b_2^{2\prime}$ sind praktisch vollkommen ausreichend, da allgemein die zur Hauptfigurenachse des Magneten (Erdachse) parallele Komponente $a_1^0 \cdot R^3$ seines Moments gegen alle übrigen Glieder 1. und höherer Ordnung stark überwiegt [durchweg nur geringer Neigungswinkel ϑ_0 der (geo-)magnetischen Achse]. Die allgemein gültigen, *exakten* Transformationsformeln (für beliebig geneigte Zentralachsen bei festem Koordinatenursprung) ergeben sich aus einer Arbeit von Ad. Schmidt, Z. Math. Physik **44**, 327—338 [1899]. Für die *Erde* beispielsweise folgt aus diesen ein absol. Quadrupolkoeffizient $n = 19{,}5 \cdot 10^{-3}\ \Gamma$, während der Näherungswert $19{,}8 \cdot 10^{-3}\ \Gamma$ beträgt. Der geringe Fehler von 1,5% ist in Anbetracht der unvollständig bestimmten — nur für die geogr. Breiten zwischen 60° S und 60° N exakt festgelegten — Koeffizienten a_n^m, b_n^m der Epoche 1922,5 völlig bedeutungslos.

[12] Zerlegung des irdischen Dipolfeldes in einen Anteil in Richtung der Rotationsachse (Komponente $M_x = a_1^0\,R_2$) und einen zum ersteren transversalen Anteil (äquatoriale Quermagnetisierung mit den Komponenten $M_y = a_1^1 R^3$, $M_z = b_1^1 R^3$). — Vgl. G. Angenheister, Handb. d. Physik **XV** (2. Aufl., 1928), S. 271 ff.